Optimización dinámica con información híbrida: dos casos prácticos

Dynamic optimization with hybrid numbers: two case studies

Luisa Lucila Lazzari
Patricia Inés Mouliá
María José Fernández
CIMBAGE. Facultad de Ciencias Económicas. Universidad de Buenos Aires

Resumen:

La programación dinámica es un método de optimización de sistemas o de su representación matemática, donde se opera por fases, es decir, las decisiones se toman en forma secuencial.

En muchas situaciones la información disponible no es homogénea, se cuenta con algunos datos objetivos y otros inciertos. En estos casos, es adecuado el empleo de números híbridos que combinan lo aleatorio con lo borroso sin pérdida de información.

En el presente trabajo se aplica programación dinámica para el estudio de dos casos: el diseño de una autopista cuya construcción tenga el menor costo posible y la distribución de inversiones en publicidad que proporcione el máximo beneficio.

En ambas situaciones, los valores correspondientes a la información disponible están expresados mediante números híbridos y se efectúa una representación diferente de los mismos en cada optimización.

Palabras clave:

Optimización dinámica - números híbridos - borrosidad - aleatoriedad.

Abstract:

Dynamic programming is an optimization system method or its mathematical representation, operating in phases, in other words, decisions are made sequentially.

In many situations the available information is not homogeneous, this is objective data and uncertain one. In these cases, the use of hybrid numbers which combine randomness with fuzziness is useful to avoid losing information.

In the present paper dynamic programming is applied in two cases: the design of a highway which construction should have the lowest possible cost and the distribution of investments in advertising which should provide the maximum benefit.

In both situations, the values obtained with the available information are expressed by means of hybrid numbers, using a different representation in each case.

Key Words:

Dynamic optimization - hybrid numbers - fuzziness - randomness.

1. INTRODUCCIÓN

La programación dinámica es un método de optimización de sistemas o de su representación matemática, donde se opera por fases, es decir, las decisiones se toman en forma secuencial. Permite resolver problemas que contienen diversas alternativas que se establecen en un proceso de múltiples etapas.

La incertidumbre que surge del proceso del pensamiento humano y el azar asociado con los experimentos, son conceptos a menudo confundidos. En muchas situaciones se tienen algunos datos objetivos y otros borrosos, es decir que la información lograda no es homogénea. Dichos datos pueden expresarse mediante *números híbridos* que combinan lo borroso y lo aleatorio, sin perder información.

La teoría de los conjuntos borrosos o difusos (*fuzzy sets*), surge con este nombre en 1965, a partir del artículo de Lofti A. Zadeh debido a la necesidad de disponer de alguna representación matemática de familias de objetos usuales que, con la teoría clásica de conjuntos no pueden ser representadas adecuadamente.

En muchos problemas de las ciencias económicas, las características de la información disponible impiden asignar valores ciertos a las magnitudes involucradas. Mediante el empleo de la teoría de los conjuntos borrosos se busca describir y formalizar la realidad utilizando modelos flexibles que interpreten las leyes que rigen el comportamiento humano y las relaciones entre los hombres.

En el presente trabajo, se aplica programación dinámica para efectuar el estudio de dos casos: el diseño de una autopista cuya construcción tenga el menor costo posible y la distribución de inversiones en publicidad en cuatro zonas de la Argentina que proporcione el máximo beneficio.

En ambos casos, dadas sus características, los valores correspondientes a la información disponible se expresan mediante números híbridos, efectuando una representación diferente de los mismos en cada optimización.

2. NÚMEROS BORROSOS

En un determinado universo E, continuo o discreto, un *conjunto borroso* (*fuzzy set*) $\tilde{A}$ es una función $\mu_{\tilde{A}} : E \rightarrow [0,1]$ que asigna a cada elemento del conjunto E un valor $\mu_{\tilde{A}}(x)$ perteneciente al intervalo [0,1], llamado el grado o nivel de pertenencia de x a $\tilde{A}$ (Zadeh, 1965).

Se llama *α-corte o conjunto de nivel* α de $\tilde{A}$ al conjunto clásico o nítido $A_\alpha=\{x\in E / \mu_{\tilde{A}}(x)\geq\alpha\}$ para todo $\alpha \in (0,1]$ (Kaufmann, 1977). Para $\alpha = 0$, se define el α-corte como la clausura[1] de la unión de los A_α, con $0 < \alpha \leq 1$(Buckley, 1992).

Un conjunto borroso $\tilde{A} \subset \Re$, es *normal* si y sólo si, $\forall\ x \in E$, max $\mu_{\tilde{A}}(x) = 1$, y es *convexo* si y sólo si, todos sus α- cortes son subconjuntos convexos de $\Re$, es decir, intervalos cerrados de $\Re$ (Kaufmann y Gupta, 1985).

---

[1] La clausura de un conjunto A es el menor subconjunto cerrado que contiene a A, es decir, que es la intersección de todos los subconjuntos cerrados que contienen a A, y se denota A^{-}. El conjunto A^{-} es un conjunto cerrado (Yin-Ming y Mao-Kang, 1997).

Un *número borroso* (NB) es un conjunto borroso de los números reales, *convexo* y *normal*. Se puede expresar a través de sus α-cortes $A_\alpha = [a_1(\alpha), a_2(\alpha)]\ \forall\ \alpha \in [0,1]$, o mediante su función de pertenencia $\mu_{\tilde{A}}(x)$, $\forall\ x \in \Re$.

Un número borroso es *continuo* si su función de pertenencia es continua.

Se denomina *número borroso triangular* (NBT) al número borroso real y continuo $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3)$ (figura 1), determinado de manera única por los tres números reales, tales que $a_1 \leq a_2 \leq a_3$.

Su función de pertenencia es $$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < a_1 \\ \dfrac{x - a_1}{a_2 - a_1} & \text{si} \quad a_1 \leq x \leq a_2 \\ \dfrac{-x + a_3}{a_3 - a_2} & \text{si} \quad a_2 \leq x \leq a_3 \\ 0 & \text{si} \quad x > a_3 \end{cases} \qquad \forall x \in \Re.$$

Sus α-cortes son $A_\alpha = [(a_2 - a_1)\alpha + a_1, (a_2 - a_3)\alpha + a_3]\ \forall\ \alpha \in [0,1]$.

Se denomina *número borroso trapecial* (NBTr) al número borroso real y continuo $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ (figura 1), determinado de manera única por los cuatro números reales, tales que $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4$.

Su función de pertenencia es $$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < a_1 \\ \dfrac{x - a_1}{a_2 - a_1} & \text{si} \quad a_1 \leq x \leq a_2 \\ 1 & \text{si} \quad a_2 \leq x \leq a_3 \\ \dfrac{-x + a_4}{a_4 - a_3} & \text{si} \quad a_2 \leq x \leq a_3 \\ 0 & \text{si} \quad x < a_1 \end{cases} \qquad \forall x \in \Re.$$

Sus α-cortes son $A_\alpha = [(a_2 - a_1)\alpha + a_1, (a_3 - a_4)\alpha + a_4]\ \forall\ \alpha \in [0,1]$.

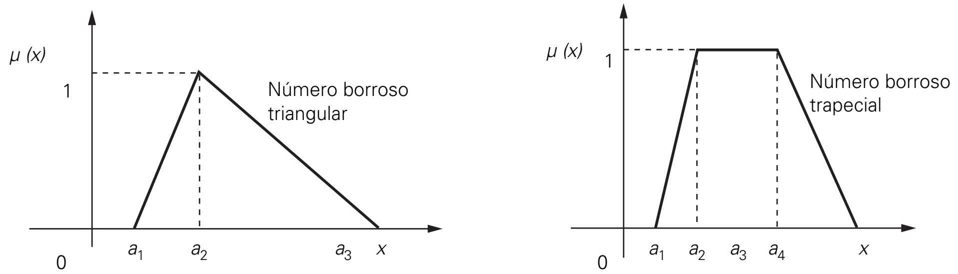

Figura 1

NBT y NBTr

Un haz de números borrosos es un conjunto de n números borrosos incluidos en un mismo referencial: $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \tilde{A}_3, \ldots, \tilde{A}_n / n$, finito. Si se consideran n observadores de un mismo objeto, cada número borroso del haz constituye su estimación del objeto.

2.1. **Adición de números borrosos**

i) Si los números borrosos que se deben sumar están expresados mediante intervalos:

Sean $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$ dos números borrosos continuos de $\Re$ y $A_\alpha = [a_1(\alpha), a_2(\alpha)]$ y $B_\alpha = [b_1(\alpha), b_2(\alpha)]$ sus intervalos de confianza para $\alpha \in [0,1]$.

Los α-cortes de $\tilde{A}$ (+) $\tilde{B}$ son: $A_\alpha (+) B_\alpha = [a_1(\alpha), a_2(\alpha)] (+) [b_1(\alpha), b_2(\alpha)]$
$= [a_1(\alpha) + b_1(\alpha), a_2(\alpha) + b_2(\alpha)]$

ii) Para el caso particular de números borrosos triangulares de $\Re$:

Sean $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\tilde{B} = (b_1, b_2, b_3)$, se define (Kaufmann, Gil Aluja, 1987):

$$\tilde{A} (+) \tilde{B} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3]$$

Puede demostrarse que el resultado es siempre un NBT. La facilidad para operar con ellos es una de las razones por las que se emplean en problemas reales.

2.2. **Criterio de orden para números borrosos**

En todo problema de toma de decisión en que se emplean cantidades borrosas, se hace necesario en algún momento del proceso ordenar las mismas. Existe una gran cantidad de métodos para lograr este objetivo, muchos de ellos han sido analizados y comparados por diferentes autores utilizando variados criterios (Wang y Kerre, 2001) resultando la mayoría de ellos adecuados para los casos simples. En los casos «difíciles», donde la decisión debe ser tomada teniendo en cuenta el contexto donde se desarrolla, se presentan diferencias significativas.

Yager ha desarrollado varios índices para ordenar números borrosos. En este trabajo, se emplea uno de ellos[2] que, particularizado a NBT resulta: $Y_{\tilde{A}} = \frac{1}{4}(a_1 + 2a_2 + a_3)$.

Dados dos números borrosos triangulares de $\Re$, $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\tilde{B} = (b_1, b_2, b_3)$:

$$\tilde{A} > \tilde{B} \Leftrightarrow \begin{cases} Y_{\tilde{A}} > Y_{\tilde{B}} \\ o \\ \left(Y_{\tilde{A}} = Y_{\tilde{B}}\right) \wedge \left(a_3 > b_3\right) \\ o \\ \left(Y_{\tilde{A}} = Y_{\tilde{B}}\right) \wedge \left(a_3 = b_3\right) \wedge \left(a_1 > b_1\right) \end{cases}$$

[2] En general $Y(\tilde{A}) = \int_0^{\alpha \max} M(A_\alpha)\, d\alpha$, donde $M(A_\alpha)$ es el valor medio de los elementos de A_α.

3. Números híbridos

Los números híbridos se utilizan para asociar datos borrosos y datos aleatorios.

Dados un número borroso $\tilde{A} \subset \Re$ expresado por sus α-cortes y un número cierto $l \in \Re$ al efectuar la suma:

$$\begin{aligned} A_\alpha (+)\, l &= [a_1(\alpha)\, ,\, a_2(\alpha)]\ (+)\ [l,\, l] \\ &= [a_1(\alpha) + l\, ,\, a_2(\alpha) + l],\ \forall\ \alpha \in [0,1] \end{aligned}$$

La operación realizada corresponde a una traslación l del número borroso $\tilde{A}$, a la izquierda si $l < 0$ y a la derecha si $l > 0$.

Si l no es un número cierto, sino una variable aleatoria L, que toma sus valores en $\Re$, cuya densidad de probabilidad es $f(l)$, el número borroso $\tilde{A}$ estará sometido a una traslación aleatoria en $\Re$, según la ley $f(l)$ (Kaufmann y Gil Aluja, 1987).

El par $(\tilde{A}, L)$ se llama *número híbrido* y representa la suma de un número borroso y de un número aleatorio, conservándose ambos, sin perder información. De esta manera, se puede asociar lo incierto y el azar sin confundirlos.

3.1. Adición de números híbridos

Dados dos números híbridos $(\tilde{A}_1, L_1)$ y $(\tilde{A}_2, L_2)$ en $\Re$, tales que L_1 y L_2 tienen densidad de probabilidad $f_1(l_1)$ y $f_2(l_2)$ respectivamente, se llama suma de estos números al número híbrido, obtenido como: $(\tilde{A}_1, L_1)\ [+]\ (\tilde{A}_2, L_2) = (\tilde{A}_1\ (+)\ \tilde{A}_2, L_1\ (+)'\ L_2)$

$$(\tilde{A}_1, L_1)\ [+]\ (\tilde{A}_2, L_2) = (\tilde{A}, L)$$

Como la adición de números borrosos (+) definida en 2.1. y la suma por convolución suma-producto (+)' de variables aleatorias[3] son asociativas y conmutativas, la operación [+] cumple ambas propiedades. Mediante esta definición es posible agregar datos ciertos, aleatorios e inciertos, en cualquier orden.

3.2. Esperanza matemática de un número híbrido

Si l es el valor que toma la variable aleatoria L, los límites del intervalo $(\tilde{A}, L)_\alpha = [a_1(\alpha) + l\, ,\, a_2(\alpha) + l],\ \forall\ \alpha \in [0,1]$ dependen solamente de l para un nivel de α dado. Esto permite calcular la esperanza matemática del número híbrido. Puede demostrarse (Kaufmann y Gupta, 1985) que la función de pertenencia de la esperanza matemática del número híbrido $(\tilde{A}, L)$ es la función de pertenencia de $\tilde{A}$ trasladada por la esperanza matemática de L:

$$\xi_\alpha(\tilde{A}, L) = [a_1(\alpha) + \xi(L),\ a_2(\alpha) + \xi(L)]$$

---

[3] «La función de densidad de la suma de dos variables aleatorias es igual a la convolución de las funciones de densidad de las variables sumandos» (Landro, 1999).

$$\begin{aligned} f(l) &= \int_R f_1(l - l_2) \cdot f_2(l_2)\, dl_2 \\ &= \int_R f_1(l_1) \cdot f_2(l - l_1)\, dl_1, \text{ si las variables son continuas.} \end{aligned}$$

$$f_{L_1(+)L_2}(z) = \sum_{z=x+y} \left[f_{L_1}(x) \cdot f_{L_2}(y) \right], \text{ si las variables son discretas.}$$

4. PROGRAMACIÓN DINÁMICA

De todas las técnicas de investigación operativa, la programación dinámica es la que emplea conceptos más simples y sin embargo es la más difícil de aplicar. Una de las dificultades es la carencia de una formulación definida y de algoritmos de solución. Por lo tanto, la formulación de cada problema requiere decisiones básicas. La programación dinámica es la técnica más apropiada para resolver problemas que requieren decisiones interrelacionadas, las que se deben tomar en forma secuencial e influyen en las decisiones futuras de esa secuencia (Bronson, 1996).

Un *proceso de decisión* de n etapas es el que puede separarse en cierto número de pasos secuenciales, o *fases*, los cuales pueden completarse en una o más formas. Las opciones para completar las etapas se denominan *decisiones*. Una *política* es una secuencia de decisiones, una para cada etapa del proceso (Shamblin y Steven, 1974).

La condición del proceso en una etapa dada se denomina *estado* en esa etapa; cada decisión produce una transición del estado actual a un estado asociado con la siguiente etapa. Un proceso de decisión de n etapas es *finito* si hay solamente un número finito de estados asociados a cada etapa.

Muchos procesos de decisión de n fases tienen rendimientos asociados a cada decisión, y estos rendimientos pueden variar tanto con la etapa como con el estado del proceso. El objetivo de analizar tales procesos es determinar una *política óptima* que dé como resultado el mejor rendimiento total.

La programación dinámica es una forma de enfoque de los procesos de decisión de optimización de n etapas que se basa en el siguiente teorema.

Teorema de optimalidad de Bellman: «Sea un sistema que puede cambiar de estado en cada fase por una decisión, siendo el número de estados en cada fase k ($k = 0,1,2,\ldots,n$) finito o no, pero numerable. Se denomina "*política*" a una cierta sucesión de decisiones para $k = 0$ a $k = n$ y «*subpolítica*» a una serie de decisiones unitivas que forman parte de una política. Entonces, si se desea optimizar una función objetivo relativa a los cambios de estado: Una política óptima solo puede estar formada por subpolíticas óptimas[4]».

Una política óptima tiene la propiedad de que, independientemente de las decisiones tomadas para llegar a un estado particular en una etapa particular, las decisiones restantes deben constituir una política óptima para abandonar ese estado.

5. EMPLEO DE NÚMEROS HÍBRIDOS EN OPTIMIZACIÓN DINÁMICA

5.1. Caso 1

Se desea construir, con el menor costo posible, una autopista de cinco tramos que una dos ciudades (A y N). Los posibles trazados de la misma se muestran en la figura 2.

Dadas las características de la información disponible sobre los costos de construcción, los valores correspondientes a las aristas están dados por números híbridos, los cuales figuran en la tabla 1. Con el fin de simplificar los cálculos, se considera que los números

[4] Su demostración puede encontrarse en Kaufmann (1967).

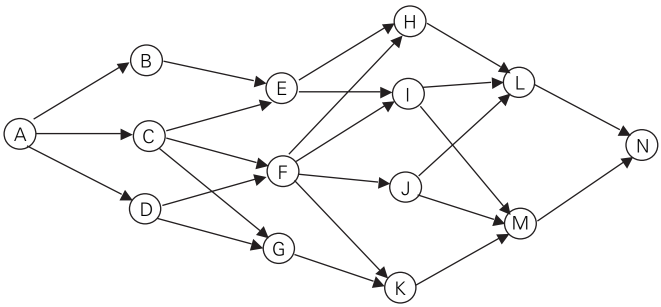

Figura 2

Posibles trazados de la autopista

Tabla 1

Costos híbridos de los distintos tramos de construcción de la autopista

Arista	NBT	Variable aleatoria		$a_2 + \bar{l}$	Arista	NBT	Variable aleatoria		$a_2 + \bar{l}$
	$\tilde{A}$	$\bar{l}$	σ L^2			$\tilde{A}$	$\bar{l}$	σ L^2	
AB	(3, 5, 6)			5	FI	(8, 11, 11)			11
AC	(2, 2, 4)			2	FJ	(3, 3, 6)	2	1	5
AD	(1, 3, 4)			3	FK	(8, 9, 12)			9
BE	(4, 5,.7)	6	3	11	GK	(3.5, 4, 5)			4
CE	(3, 5, 6)	3	1	8	HL	(4, 5, 5.8)	4	2	9
CF	(1, 2, 5)	2	1	4	IL	(2, 3, 5)			3
CG	(6, 6, 7)	3	2	9	IM	(6, 6, 6)			6
DF	(5, 6, 8)			6	JL	(5, 7, 7)			7
DG	(5, 5, 7)	1	1	6	JM	(4, 5, 7)	3	1	8
EH	(2, 3, 6)			3	KM	(3, 5, 6)			5
EI	(1, 2, 3)			2	LN	(1, 2, 3)	2	1	4
FH	(3, 5, 6)	3	1	8	MN	(2, 3, 5)			3

borrosos son NBT expresados por $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3)$ y que cada variable aleatoria tiene distribución Gaussiana y está expresada por su respectiva media $\bar{l}$ y varianza σ L^2.

Como la optimización se efectúa solo con los valores de $a_2 + \bar{l}$ (última columna de la tabla 1) el problema de programación dinámica con números híbridos queda reducido a uno nítido y para obtener el camino óptimo es necesario realizar una optimización secuencial (Kaufmann y Gupta, 1985; Lazzari y Mouliá, 2005).

Se definen las variables de decisión relativas a cada tramo, x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 y x_5, que no tendrán valor numérico sino que tomarán las posiciones deseadas indicadas por los vértices sobre un mismo alineamiento, que son x_0 : A; x_1 : B, C, D; x_2 : E, F, G; x_3 : H, I, J, K; x_4 : L, M y x_5 : N, como se puede observar en la figura 3.

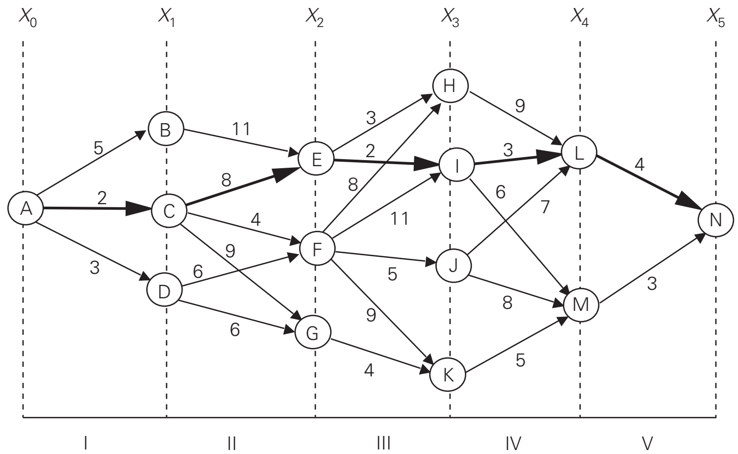

Figura 3

Búsqueda del camino óptimo

A) *Búsqueda del camino óptimo*

Los costos correspondientes a los diferentes tramos I, II, III, IV y V (figura 3) son:

$$v_{\mathrm{I}}(x_0 , x_1),\ v_{\mathrm{II}}(x_1 , x_2),\ v_{\mathrm{III}}(x_2 , x_3),\ v_{\mathrm{IV}}(x_3 , x_4)\ \text{y}\ v_{\mathrm{v}}(x_4 , x_5).$$

Luego, el costo total de la autopista es:

$$F(x_0 , x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , x_5) = v_{\mathrm{I}}(x_0 , x_1) + v_{\mathrm{II}}(x_1 , x_2) + v_{\mathrm{III}}(x_2 , x_3) + v_{\mathrm{IV}}(x_3 , x_4) + v_{\mathrm{v}}(x_4 , x_5).$$

Se inicia el proceso de optimización buscando el costo mínimo del tramo I ($f_{\mathrm{I}}(x_1)$), para cada una de las terminales B, C o D.

$f_{\mathrm{I}}(B) = v_{\mathrm{I}}(A, B) = 5$ $\qquad f_{\mathrm{I}}(C) = v_{\mathrm{I}}(A, C) = 2$ $\qquad f_{\mathrm{I}}(D) = v_{\mathrm{I}}(A, D) = 3$

Si $f_{\mathrm{I,II}}(x_2)$ es el costo mínimo para los tramos I y II a la vez, de acuerdo con el teorema de optimalidad, los caminos que llegan a E, F y G deben estar formados por tramos para los cuales el costo sea mínimo

$f_{\mathrm{I,II}}(\mathrm{E})$ = mín [5 + 11; 2 + 8] = 10 camino mínimo ACE
$f_{\mathrm{I,II}}(\mathrm{F})$ = mín [2 + 4; 3 + 6] = 6 camino mínimo ACF
$f_{\mathrm{I,II}}(\mathrm{G})$ = mín [2 + 9; 3 + 6] = 9 camino mínimo ADG

Continuando con notaciones similares, si $f_{I,II,III}(x_3)$ es el costo mínimo para el conjunto de los tramos I, II y III, aplicando el teorema de optimalidad:

$f_{I,II,III}(H) = \text{mín}\ [10 + 3; 6 + 8] = 13$	camino mínimo ACEH
$f_{I,II,III}(I) = \text{mín}\ [10 + 2; 6 + 11] = 12$	camino mínimo ACEI
$f_{I,II,III}(J) = \text{mín}\ [6 + 5] = 11$	camino mínimo ACFJ
$f_{I,II,III}(K) = \text{mín}\ [6 + 9; 9 + 4] = 13$	camino mínimo ADGK

Procediendo del mismo modo, si $f_{I,II,III,IV}(x_4)$ es el costo mínimo para los tramos I, II, III y IV juntos:

$f_{I,II,III,IV}(L) = \text{mín}\ [13 + 9; 12 + 3; 11 + 7] = 15$	camino mínimo ACEIL
$f_{I,II,III,IV}(M) = \text{mín}\ [12 + 6; 11 + 8; 13 + 5] = 18$	caminos mínimos ACEIM o ADGKM

Finalmente, llamando f al mínimo de $F(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ correspondiente al conjunto de los cinco tramos, resulta $f = \text{mín}\ [15 + 4; 18 + 3] = 19$.

El camino mínimo es ACEILN (figura 3).

B) *Costo del camino óptimo*

Una vez obtenido el camino óptimo, se calcula la suma híbrida correspondiente (Kaufmann y Gupta, 1985). El costo se obtiene efectuando la siguiente suma, con los valores que figuran en la tabla 1:

AC: :(2, 2, 4)

ACE: :(2, 2, 4)[+][(3, 5, 6)[+](3, 1)]
:(5, 7, 10)[+](3, 1)

ACEI: :[(5, 7, 10)[+](3, 1)][+](1, 2, 3)
:(6, 9, 13)[+](3, 1)

ACEIL: :[(6, 9, 13)[+](3, 1)][+](2, 3, 5)
:(8, 12, 18)[+](3, 1)

ACEILN: :[(8, 12, 18)[+](3, 1)][+][(1, 2, 3)[+](2, 1)]
:[(8, 12, 18)[+](1, 2, 3)][+][(3, 1)(+)´(2, 1)]
:(9, 14, 21)[+](5, 2)
:(14, 19, 26)[+](0, 2)

El resultado puede ser escrito en función de la desviación estándar $\sqrt{2} \cong 1.41$. Por lo tanto, el costo mínimo es el número híbrido con distribución:

$$\left(14-\sqrt{2},\ 19-\sqrt{2},\ 26-\sqrt{2}\right) \le \left(c_1, c_2, c_3\right) \le \left(14+\sqrt{2},\ 19+\sqrt{2},\ 26+\sqrt{2}\right)$$

ó

$$\left(12.59, 17.59, 24.59\right) \le \left(c_1, c_2, c_3\right) \le \left(15.41, 20.41, 27.41\right)$$

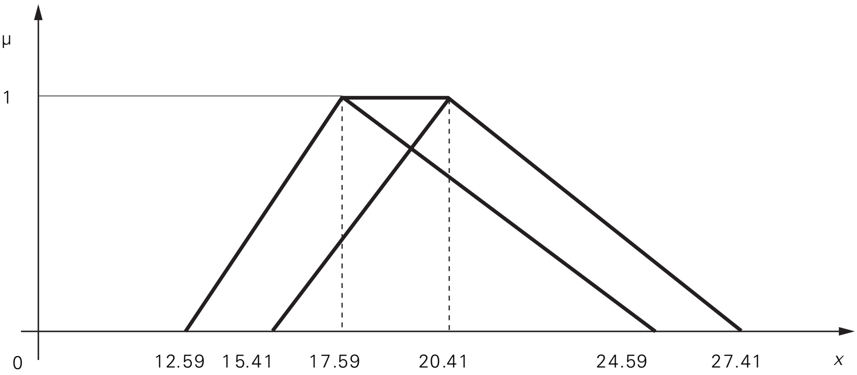

Figura 4
Costo del camino óptimo

La figura 4 muestra el resultado, el cual puede ser representado por el número borroso trapecial $\tilde{C}$ = (12.59, 17.59, 20.41, 27.41), que es la envolvente del haz de soluciones posibles de NBT, donde la aleatoriedad está dada por la media y la desviación estándar.

5.2. **Caso 2**

Se analiza un caso de inversión en publicidad en cuatro zonas, para cada una de las cuales se conocen los beneficios correspondientes a distintos montos de inversión. Este problema ya ha sido estudiado empleando números nítidos (Kaufmann, 1967) y números borrosos triangulares (Kaufmann y Gil Aluja, 1987). En este caso los beneficios están representados por números híbridos. Se trata de optimizar la distribución de inversiones para obtener el máximo beneficio. Se dispone de un presupuesto de $10 millones para invertir en las cuatro zonas.

Sean x_1, x_2, x_3 y x_4, las inversiones en millones de pesos en las zonas 1, 2, 3 y 4 respectivamente. Se asume que estas variables solo pueden tomar los valores enteros 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10 y que $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$. Los posibles beneficios de cada zona para cada monto están dados en las tablas 2 y 3.

En este caso, cada variable aleatoria tiene distribución gaussiana y está expresada mediante su esperanza matemática. La optimización se realiza utilizando la esperanza matemática del número híbrido, definida en 3.2 (Kaufmann y Gupta, 1985), que para $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3)$ es igual a $\xi(\tilde{A}, L) = [a_1 + \xi(L); a_2 + \xi(L); a_3 + \xi(L)]$.

Para obtener el camino óptimo se realiza una maximización secuencial aplicando programación dinámica. Se aplica el *Teorema de optimalidad* para obtener la política de distribución de la inversión que proporciona el beneficio total óptimo, realizando un tratamiento secuencial del problema. Se utiliza la siguiente notación:

$f_i(x)$	Función de beneficios correspondiente a la zona *i*.
$F_{1,2}(z)$	Beneficio óptimo al invertir $z = x_1 + x_2$ millones en las zonas 1 y 2.
$F_{1,2,3}(z)$	Beneficio óptimo al invertir $z = x_1 + x_2 + x_3$ millones en las zonas 1, 2 y 3.
$F_{1,2,3,4}(z)$	Beneficio óptimo al invertir $z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ millones en las cuatro zonas.

Tabla 2

Beneficios zonas 1 y 2

Inv. Zona 1	NBT $\tilde{A}$	ξ (L)	ξ $(\tilde{A}, L)$	Inv. Zona 2	NBT $\tilde{A}$	ξ (L)	ξ $(\tilde{A}, L)$
0	(0, 0, 0)	0	(0, 0, 0)	0	(0, 0, 0)	0	(0, 0, 0)
1	(0.20, 0.23, 0.25)	0.05	(0.25, 0.28, 0.30)	1	(0.19,0.24,0.25)	0.01	(0.20, 0.25, 0.26)
2	(0.39,0.44, 0.45)	0.01	(0.40,0.45,0.46)	2	(0.25, 0.33, 0.35)	0.08	(0.33, 0.41, 0.43)
3	(0.5, 0.57, 0.64)	0.08	(0.58, 0.65, 0.71)	3	(0.44, 0.51, 0.56)	0.04	(0.48, 0.55, 0.60)
4	(0.68, 0.76, 0.83)	0.02	(0.70, 0.78, 0.85)	4	(0.62, 0.65, 0.67)	0	(0.62, 0.65, 0.67)
5	(0.81, 0.90, 1.01)	0	(0.81, 0.90, 1.01)	5	(0.57, 0.64, 0.66)	0.11	(0.68, 0.75, 0.77)
6	(0.71, 0.78, 0. 87)	0.24	(0.95, 1.02, 1.11)	6	(0.61, 0.71, 0.81)	0.09	(0.70, 0.80, 0.90)
7	(0.89, 0.98, 1.01)	0.15	(1.04, 1.13, 1.16)	7	(0.67, 0.69, 0.74)	0.16	(0.83, 0.85, 0.90)
8	(1.11, 1.14, 1.21)	0.09	(1.20, 1.23, 1.30)	8	(0.65,0.68, 0.70)	0.20	(0.85, 0.88, 0.90)
9	(1.19, .1.20, 1.30)	0.12	(1.31, 1.32, 1.42)	9	(0.74, 0.76, 0.79)	0.14	(0.88, 0.90, 0.93)
10	(1.02, 1.05, 1.17)	0.33	(1.35, 1.38, 1.50)	10	(0.67, 0.67, 0.71)	0.23	(0.90, 0.90, 0.94)

Tabla 3

Beneficios zonas 3 y 4

Inv. Zona 3	NBT $\tilde{A}$	ξ (L)	ξ $(\tilde{A}, L)$	Inv. Zona 4	NBT $\tilde{A}$	ξ (L)	ξ $(\tilde{A}, L)$
0	(0, 0, 0)	0	(0, 0, 0)	0	(0, 0, 0)	0	(0, 0, 0)
1	(.10, .12, .15)	.03	(.13, .15, .18)	1	(.11, .13, .17)	.07	(.18, .20, .24)
2	(.13, .19, .20)	.06	(.19, .25, .26)	2	(.22, .30, .35)	.03	(.25, .33, .38)
3	(.27, .30, .32)	.10	(.37, .40, .42)	3	(.24, .29, .35)	.13	(.37, .42, .48)
4	(.20, .25, .26)	.25	(.45, .50, .51)	4	(.24, .32, .36)	.16	(.40, .48, .52)
5	(.51, .60, .64)	.02	(.53, .62, 66)	5	(.51, .53, .54)	0	(.51, .53, .54)
6	(.61, .64, .65)	.09	(.70, .73, .74)	6	(.49, .50, .51)	.06	(.55, .56, .57)
7	(.76, .82, .83)	0	(.76, .82, .83)	7	(.39, .41, .41)	.17	(.56, .58, .58)
8	(.74, .75, .80)	.15	(.89, .90, .95)	8	(.37, .38, .38)	.22	(.59, .60, .60)
9	(.77, .78, 86)	.18	(.95, .96, 1.02)	9	(.40, .41, .42)	.19	(.59, .60, .61)
10	(.76, .78, .86)	.22	(.98, 1.00, 1.08)	10	(.45, .46, 50)	.14	(.59, .60, 64)

A) *Búsqueda de la subpolítica óptima para las zonas 1 y 2*

Se obtienen los distintos valores de $F_{1,2}(z)$ para z = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 6, 7, 8, 9, 10, teniendo en cuenta que $F_{1,2}(z) = \max\limits_{x+y=z}\left[f_1(x) + f_2(y)\right]$.

Por ejemplo para $z = 0$: $f_1(0)$ (+) $f_1(0)$ = (0, 0, 0) y $F_{1,2}(0)$ = (0, 0, 0).

Para $z = 1$: $\tilde{A} = f_1(1)$ (+) $f_2(0)$ = (0.25, 0.28, 0.30); $\tilde{B} = f_1(0)$ (+) $f_2(1)$ = (0.20, 0.25, 03.26).

Se ordenan los NBT de acuerdo con el criterio enunciado en 2.2.

$a = 0.2775 \wedge b = 0.24 \Rightarrow \tilde{A} > \tilde{B}$.

La inversión óptima para un millón es un millón en la zona 1 con un beneficio de $F_{1,2}(1)$ = (0.25, 0.28, 0.30).

Para $z = 2$: $\tilde{A} = f_1(0)$ (+) $f_2(2)$ = (0.33, 0.41, 0.43); $\tilde{B} = f_1(1)$ (+) $f_2(1)$ = (0.45, 0.53, 0.56); $\tilde{C} = f_1(2)$ (+) $f_2(0)$ = (0.40, 0.45, 0.46)

Ordenando los NBT: $a = 0.395 \wedge b = 0.5175 \wedge c = 0.44 \Rightarrow \tilde{B} > \tilde{C} > \tilde{A}$.

La inversión óptima para 2 millones es un millón en la zona 1 y un millón en la zona 2, con un beneficio $F_{1,2}(2)$ = (0.45, 0.53, 0.56).

Análogamente se obtienen los restantes valores de $F_{1,2}(z)$ (tabla 4).

Tabla 4

Subpolítica óptima para las zonas 1 y 2

Inversión *I*	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$F_{1,2}(z)$	Política óptima Zonas 1 y 2
0	(0, 0, 0)	(0, 0, 0)	(0, 0, 0)	(0,0)
1	(.25, .28, .30)	(.20, .25, .26)	(.25, .28, .30)	(1,0)
2	(.40, .45, .46)	(.33, .41, .43)	(.45, .53, .56)	(1,1)
3	(.58, .65, .71)	(.48, .55, .60)	(.60, .70, .72)	(2,1)
4	(.70, .78, .85)	(.62, .65, .67)	(.78, .90, .97)	(3,1)
5	(.81, .90, 1.01)	(.68, .75, 77)	(.91, 1.06, 1.14)	(3,2)
6	(.95, 1.02, 1.11)	(.70, .80, .90)	(1.06, 1.20, 1.31)	(3,3)
7	(1.04, 1.13, 1.16)	(.83, .85, .90)	(1.18, 1.33, 1.45)	(4,3)
8	(1.20, 1.23, 1.30)	(.85, .88, .90)	(1.29, 1.45, 1.61)	(5,3)
9	(1.31, 1.32, 1.42)	(.88, .90, 93)	(1.43, 1.57, 1.71)	(6,3)
10	(1.35, 1.38, 1.50)	(.90, .90, .94)	(1.57, 1.67, 1.78)	(6,4)

B) *Búsqueda de la subpolítica óptima para las zonas 1, 2 y 3*

Se calculan los valores de $F_{1,2,3}(z)$ para z = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,10 considerando que: $F_{1,2,3}(z) = \underset{x+y=z}{\text{máx}}\left[F_{1,2}(x) + f_3(y)\right]$.

Procediendo de esta manera para z = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, se obtienen los distintos valores de $F_{1,2,3}(z)$, como puede observarse en la tabla 5.

Tabla 5

Subpolítica óptima para las zonas 1, 2 y 3

Inversión *L*	$f_{1,2}(x)$	$f_3(x)$	$F_{1,2,3}(z)$	Política óptima Zonas 1, 2 y 3
0	(0, 0, 0)	(0, 0, 0)	(0, 0, 0)	(0,0,0)
1	(.25, .28, .30)	(.13, .15, .18)	(.25, .28, .30)	(1,0,0)
2	(.45, .53, .56)	(.19, .25, .26)	(.45, .53, .56)	(1,1,0)
3	(.60, .70, .72)	(.37, .40, .42)	(.60, .70, .72)	(2,1,0)
4	(.78, .90, .97)	(.45, .50, .51)	(.87, .90, .97)	(3,1,0)
5	(.91, 1.06, 1.14)	(.53, .62, 66)	(.91, 1.06, 1.14)	(3,2,0)
6	(1.06, 1.20, 1.31)	(.70, .73, .74)	(1.04, 1.21, 1.32)	(3,2,1)
7	(1.18, 1.33, 1.45)	(.76, .82, .83)	(1.19, 1.35, 1.49)	(3,3,1)
8	(1.29, 1.45, 1.61)	(.89, .90, .95)	(1.31, 1.48, 1.63)	(4,3,1)
9	(1.43, 1.57, 1.71)	(.95, .96, 1.02)	(1.42, 1.60, 1.79)	(5,3,1)
10	(1.57, 1.67, 1.78)	(.98, 1.00, 1.08)	(1.56, 1.72, 1.89)	(6,3,1)

C) *Búsqueda de la subpolítica óptima para las cuatro zonas*

Por último obtendremos los valores de $F_{1,2,3,4}(z)$ para z = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, siendo: $F_{1,2,3,4}(z) = \underset{x+y=z}{\text{máx}}\left[F_{1,2,3}(x) + f_4(y)\right]$.

Para z = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, se obtienen los distintos valores de $F_{1,2,3,4}(z)$ que figuran en la tabla 6.

En la última fila de la tabla 6 se observa que la inversión óptima para \$10 millones es de \$5 millones en la zona 1, \$3 millones en la 2, \$1 millón en la 3 y \$1 millón en la 4.

Tabla 6

Subpolítica óptima para las zonas 1, 2, 3 y 4

Inversión L	$f_{1,2,3}(x)$	$f_4(x)$	$F_{1,2,3,4}(z)$	Política óptima Zonas 1, 2, 3 y 4
0	(0, 0, 0)	(0, 0, 0)	(0, 0, 0)	(0,0,0,0)
1	(.25, .28, .30)	(.18, .20, .24)	(.25, .28, .30)	(1,0,0,0)
2	(.45, .53, .56)	(.25, .33, .38)	(.45, .53, .56)	(1,1,0,0)
3	(.60, .70, .72)	(.37, .42, .48)	(.63, .73, .80)	(1,1,0,1)
4	(.87, .90, .97)	(.40, .48, .52)	(.78, .90, .97)	(3,1,0,0)
5	(.91, 1.06, 1.14)	(.51, .53, .54)	(.96, 1.10, 1.21)	(3,1,0,1)
6	(1.04, 1.21, 1.32)	(.55, .56, .57)	(.109, 1.26, 1.38)	(3,2,0,1)
7	(1.19, 1.35, 1.49)	(.56, .58, .58)	(1.22, 1.41, 1.56)	(3,2,1,1)
8	(1.31, 1.48, 1.63)	(.59, .60, .60)	(1.37, 1.55, 1.73)	(3,3,1,1)
9	(1.42, 1.60, 1.79)	(.59, .60, .61)	(1.49, 1.68, 1.87)	(4,3,1,1)
10	(1.56, 1.72, 1.89)	(.59, .60, 64)	(1.60, 1.80, 2.03)	(5,3,1,1)

Se verifica además que las subpolíticas de (5,3,1,1) son óptimas:

$$\begin{aligned}\bar{F}_{1,2,3,4}(10) &= F_{1,2,3}(9)\,(+)\,f_4(1)\\ &= F_{1,2}(8)\,(+)\,f_3(1)\,(+)f_4(1)\\ &= f_1(5)\,(+)f_2(3)\,(+)\,f_3(1)\,(+)\,f_4(1)\end{aligned}$$

El resultado es el NBT $\tilde{B}$ = (1.60, 1.80, 2.03).

Si la optimización se efectuara como en el caso 1, en el que se expresa la parte aleatoria del número híbrido mediante la media y la varianza, se obtendría como resultado el haz de números borrosos (figura 5) cuya envolvente es $\tilde{H}$ = (1.475, 1.615, 1.834, 2.274) (Lazzari y Fernández, 2004) al cual pertenece el NBT $\tilde{B}$ obtenido en el caso 2.

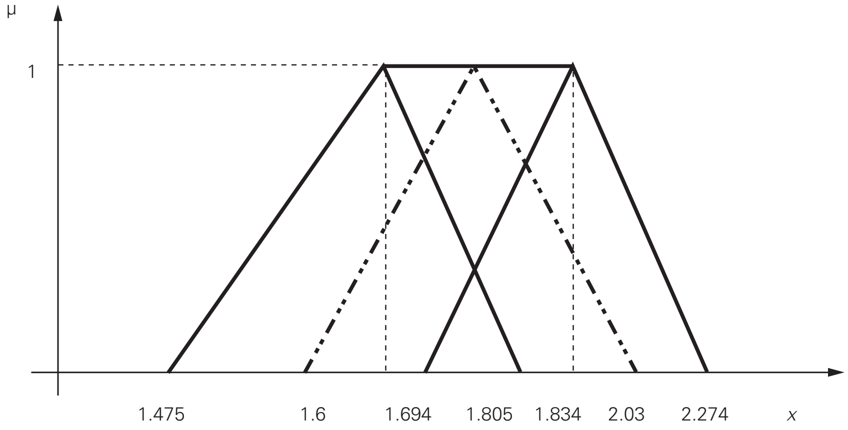

Figura 5
Beneficio óptimo

En consecuencia, puede observarse que cuando se reemplaza el número híbrido por su esperanza matemática hay una importante pérdida de información.

6. CONCLUSIONES

Al emplear *programación dinámica* en la resolución de los casos planteados, se han buscado las subpolíticas óptimas que incluyan cada vez más fases, hasta encontrar la o las políticas óptimas.

En los casos analizados es posible iniciar el proceso por el otro extremo, así como proceder por partes. Se llegaría al mismo resultado optimizando de acuerdo con otra secuencia.

Dadas las características del escenario en el cual están inmersos, es pertinente expresar tanto los costos de construcción de cada tramo de la autopista, como los beneficios correspondientes a los distintos montos de inversión en publicidad mediante *números híbridos*. Estos capturan de manera más adecuada las posibles estimaciones de los expertos, las que no pueden ser fielmente reflejadas mediante números nítidos, por su excesiva simplificación.

En estos procesos de optimización secuencial, resulta más conveniente expresar cada variable aleatoria gaussiana por su respectiva media y varianza (Caso 1) en lugar de hacerlo a través de su esperanza matemática (Caso 2), ya que hay menor pérdida de información.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BRONSON, R. (1996). *Investigación de operaciones*, México, McGraw-Hill, Serie Schawn.

BOJADZIEV, G; BOJADZIEV, M. (1997). *Fuzzy Logic for Business, Finance, and Management,* Singapore, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.

BORTOLAN G.; DEGANI, R. (1993). «A Review of some methods for ranking fuzzy subsets», en DUBOIS; PRADE; YAGER (Eds.) *Fuzzy Sets for Intelligent Systems*, Londres, Morgan Kaufmann Publishers Inc.

BUCKLEY, J.J. (1992). «Solving fuzzy equations in economics and finance». *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 48, pp.289-296.

KAUFMANN, A. (1967). *Métodos y modelos de la programación dinámica, Las matemáticas de la empresa*, México, Compañía Editorial Continental S.A.

KAUFMANN, A. (1977). *Introduction a la Theorie des Sous-Ensembles Flous a L'Usage des Ingenieurs*, Paris, Masson, S.A., Editeur.

KAUFMANN, A.; GIL ALUJA, J. (1986). *Introducción a la teoría de los subconjuntos borrosos a la gestión de las empresas*, Santiago de Compostela, Editorial Milladoro.

KAUFMANN, A.; GIL ALUJA, J. (1987). *Técnicas operativas de gestión para el tratamiento de la incertidumbre*, Barcelona, Editorial Hispano Europea.

KAUFMANN, A.; GUPTA. M. (1985). *Introduction to Fuzzy Arithmetic: Theory and Applications,* van Nostrand Reinhold, Electric/Computer Science and Engineering Series, Nueva York.

KLIR G.; YUAN, B. (1995). *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic. Theory and Applications*, Washington D.C., Prentice-Hall PTR.

LANDRO, A. (1999). *Acerca de la probabilidad,* Buenos Aires, Economizarte.

LAZZARI, L.L.; FERNÁNDEZ, M. J. (2004). «El empleo de números híbridos en la optimización dinámica». *Actas* XIX *Jornadas Nacionales de Docentes de Matemática de Facultades de Ciencias Económicas y Afines*. Paraná, pp.38-50.

LAZZARI, L. (comp.) (2001). *Los conjuntos borrosos y su aplicación a la programación lineal,* Buenos Aires, Facultad de Ciencias Económicas, UBA.

LAZZARI, L.L.; MACHADO, E.A. M.; PÉREZ, R. H. (1994). «Administración de una campaña publicitaria». *Alta Gerencia. Estrategias para la Administración*. Año II, Tomo IV, Buenos Aires, pp. 277-288.

LAZZARI, L. L.; MOULIÁ, P. I. (2005) «En busca del camino óptimo cuando la aleatoriedad y la incertidumbre se adicionan», Actas XII EMCI, San Juan, pp. 31-42.

SHAMBLIN, J. E.; STEVENS G. T. JR. (1974). *Investigación de operaciones,* Bogotá, McGraw-Hill.

WANG, X.; KERRE E. (2001). «Reasonable properties for the ordering of fuzzy quantities (I)». *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 118, pp.375-385.

YING-MING, L.; MAO-KANG, L. (1997). *Fuzzy Topology,* Singapur, World Scientific.

ZADEH, L. A. (1965). «Fuzzy Sets». *Information and Control* 8, pp. 338-353.